



Nhiệt liệt chào mừng các thầy cô!

ĐẠI SỐ 9:

Chuyên đề :Bất Đẳng Thức

Giáo viên :Nguyễn Đình An

PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

I. Kiến thức cần biết

1. Định nghĩa: Bất đẳng thức là hai số hoặc hai biểu thức (số hoặc chữ) nối với nhau bởi một trong các dấu lớn hơn ($>$), nhỏ hơn ($<$), nhỏ hơn hoặc bằng ($\leq$); lớn hơn hoặc bằng ($\geq$)

+Ta có: $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$; $A < B \Leftrightarrow A - B < 0$;

$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$; $A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0$

Các bất đẳng thức có thể đúng hoặc sai. Khi nói một bất đẳng thức nếu không giải thích gì thêm thì đó là một bất đẳng thức đúng

+ Trong bất đẳng thức $A > B$ ($A < B$; $A \geq B$; $A \leq B$) A gọi là vế trái, B gọi là vế phải. Các bất đẳng thức $A > B$ và $C > D$ gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Các bất đẳng thức $A > B$ và $E < F$ là hai bất đẳng thức trái chiều.

+ Nếu ta có $A > B \Rightarrow C > D$ ta nói bất đẳng thức $C > D$ là hệ quả của bất đẳng thức $A > B$.

+ Nếu ta có $A > B \Leftrightarrow E > F$ ta nói hai bất đẳng thức $A > B$ và $E > F$ là hai bất đẳng thức tương đương

+ $A > B$ (hoặc $A < B$) gọi là bất đẳng thức ngặt

+ $A \geq B$ (hoặc $A \leq B$) gọi là bất đẳng thức không ngặt

+ $A \neq B$ cũng là bất đẳng thức

+ Hai bất đẳng thức cùng chiều hợp thành một dãy không mâu thuẫn gọi là bất đẳng thức kép

PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

I. Định nghĩa:

II. Tính chất:

+ **Tính chất 1:** (bắc cầu) $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

+ **Tính chất 2:** $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả: $a > b + c \Leftrightarrow a - c > b$

+ **Tính chất 3:** $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

+ **Tính chất 4:** $a > b \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} ac > bc \\ ac < bc \\ ac = bc \end{cases}$$

+ **Tính chất 5:** $a > b > 0$ và $c > d \Leftrightarrow ac > bd$

+ **Tính chất 6:** $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^*$

+ **Tính chất 7:** $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả: $(a, b \geq 0) : a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$

+ **Tính chất 8:** $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

+ **Tính chất 9:** $a > 1; m, n \in \mathbb{N}^*, m > n \Rightarrow a^m > a^n$
 $0 < a < 1; m, n \in \mathbb{N}^*, m > n \Rightarrow a^m < a^n$

*** Chú ý:**

$$1) A^2 \geq 0; -A^2 \leq 0$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow A = 0$

$$2) -|A| \leq A \leq |A| ; |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 ; |A| = -A \Leftrightarrow A < 0$$

3) Với hai số không âm a và b ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{Bất đẳng thức Cauchy})$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

***Trung bình cộng lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân.**

PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

I. Định nghĩa:

II. Tính chất:

III. Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1. Phương pháp qui ước đúng
2. Phương pháp phân tích
3. Phương pháp tổng hợp
4. Phương pháp bất đẳng thức thông dụng
5. Phương pháp sử dụng 2 bộ n sắp thứ tự
6. Phương pháp giải tích
7. Phương pháp phản chứng
8. Phương pháp bất phương trình
9. Phương pháp tam thức bậc hai
10. Phương pháp chọn phần tử lớn nhất
11. Phương pháp đánh giá từng nhóm số hạng
12. Phương pháp hình giải tích
13. Phương pháp chọn cơ sở cho hình học
14. Phương pháp bất đẳng thức SCHWARTZ
15. Phương pháp ước lượng Non-Già
16. Phương pháp đổi biến
17. Phương pháp lượng giác
18. Phương pháp qui nạp toán học.

PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

I. Định nghĩa:

II. Tính chất:

III. Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1. Phương pháp qui ước đúng

Cơ sở của phương pháp này là sử dụng qui ước (dựa vào định nghĩa)

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0; A < B \Leftrightarrow A - B < 0;$$

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0; A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0$$

Bước 1: Xét hiệu $A-B$ và phân tích hiệu thành tổng hay tích của các hạng tử.

Bước 2: Chứng minh bất đẳng thức $A-B$ luôn luôn đúng từ các bất đẳng thức cơ bản hay bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức khác.

2. Phương pháp phân tích:

Còn gọi là phương pháp biến đổi tương đương

Bước 1: Xét bất đẳng thức ở giả thiết, chẳng hạn $A \geq B(1)$

Bước 2: Phân tích (1) bằng các biến đổi sơ cấp để đưa (1) về bất đẳng thức mới $C \geq D(2)$. Trong đó (2) luôn luôn đúng theo một hình thức hiển nhiên hay chứng minh nó dễ dàng (bằng mọi phương pháp)

Bước 3: Kết luận (1) đúng theo lập luận của phương pháp phân tích.

Bài toán A

Chứng minh rằng:

$$m^2 - mn + n^2 \geq 0, \text{ với mọi } m, n$$

Giải: Ta có $m^2 - mn + n^2$

$$= \left(m^2\right) - 2\left(m\right)\left(\frac{1}{2}n\right) + \left(\frac{1}{2}n\right)^2 - \frac{1}{4}n^2 + \frac{4}{4}n^2$$

$$= \left(m - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 \geq 0$$

Vậy $m^2 - mn + n^2 \geq 0$, với mọi m, n

Chứng minh rằng:

$m^2 - mn + n^2 \geq 0$, với mọi m, n

Bài toán 1

Bài toán A

Chứng tỏ rằng:

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$$

(Trích đề thi chọn HSG trường THCS
Nguyễn Gia Thiều, Quận Tân Bình,
TPHCM năm 2000-2001)

Nếu ta thay $m = x - 1$ và $n = 1 - y$ vào bài toán A ta thấy

$$(x-1)^2 - (x-1)(1-y) + (1-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - (x - xy - 1 + y) + 1 - 2y + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$$

Bài toán 1

Chứng tỏ rằng :

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$$

Nếu ta thay $m = x$; $n = y$ và x, y khác 0

Ta có: $x^2 - xy + y^2 \geq 0$; $\frac{(x-y)^2}{x^2 y^2} \geq 0$

Vậy $(x^2 - xy + y^2) \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2 y^2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \right) \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 - 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq 0$$

Chứng minh rằng:

$$m^2 - mn + n^2 \geq 0, \text{ với mọi } m, n$$

Bài toán 1

Chứng tỏ rằng:

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$$

Bài toán A

Bài toán 2

Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 4 \geq 0$$

(Trích đề thi vô địch toán Cộng Hòa Secbi, năm 1977
hay đề thi HSG toán 9 toàn quốc năm 1994 – 1995
hoặc đề thi HSG toán 9, Quận I và Quận Tân Bình,
TPHCM năm 1999-2000)

Bài toán 2 (Cách 1)

$$\text{Với } x, y \neq 0, \quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4$$

$$= \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{x}{y}\frac{y}{x}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2$$

$$\text{Đặt } a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow |a| = \left|\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right| = \left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq \sqrt{\left|\frac{x}{y}\right| \cdot \left|\frac{y}{x}\right|} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } f(x) &= a^2 - 3a + 2 \text{ với } |a| \geq 2 = a^2 - 2a - a + 2 = a(a - 2) - (a - 2) \\ &= (a - 2)(a - 10). \end{aligned}$$

$$\text{Do } |a| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a \leq -2 \end{cases} \Rightarrow a - 2 \text{ và } a - 10 \text{ cùng dấu}$$

$$\text{Vậy } f(a) \geq 0, \text{ với mọi } |a| \geq 2. \text{ Suy ra: } \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y \neq 0$

Bài toán 2 (Cách 2)

$$\begin{aligned} & \text{Với } x, y \neq 0, \quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \\ &= \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{x}{y}\frac{y}{x}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right) = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 y^2} \\ &= \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} \left[x^2 - 2\frac{y}{2}x + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 \right] = \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y \neq 0$

Bài toán 2 (Cách 3)

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3x}{y} - \frac{3y}{x} + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 - 3x^3y - 3xy^3 + 4x^2y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + y^4 - x^3y - xy^3) - (2x^3y + 2xy^3 - 4x^2y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [x^3(x - y) + y^3(x - y)] - 2xy(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \cdot (x^3 - y^3) - 2xy(x - y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \cdot (x^2 + xy + y^2) - 2xy(x - y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \cdot (x^2 + xy + y^2 - 2xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \cdot \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right] \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y \neq 0$

Chứng minh rằng:

$$m^2 - mn + n^2 \geq 0, \text{ với mọi } m, n$$

Bài toán 1

Chứng tỏ rằng:

$$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0$$

Bài toán A

Bài toán 2

Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng

minh:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$$

Bài toán 3

Chứng minh rằng: $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$, với mọi x, y .

Bài toán 3 (Cách 1)

Chứng minh rằng: $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$, với mọi x, y .

$$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x - y) - y^3(x - y) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 (x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left(x^2 + 2\frac{y}{2}x + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left[\left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Bài toán 3 (Cách 1)

Chứng minh rằng: $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$, với mọi x, y .

$$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x - y) - y^3(x - y) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 (x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left(x^2 + 2\frac{y}{2}x + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left[\left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Bài toán 3 (Cách 4)

$$\begin{aligned} (x^4 + y^4) - (x^3y + xy^3) &= \frac{1}{2}(2x^4 + 2y^4 - 2x^3y - 2xy^3) \\ &= \frac{1}{2}[(x^4 - 2x^3y + x^2y^2) + (y^4 - 2xy^3 + x^2y^2) + (x^4 + y^4 - 2x^2y^2)] \\ &= \frac{1}{2}[(x^2 - xy)^2 + (y^2 - xy)^2 + (x^2 - y^2)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

**Chúc các em học tốt!
Chào tạm biệt!**



Strikin' up the band to wish ya !